Le Jeu de la Vérité

Introduction aux Graphes Existentiels de Peirce

Apprendre la logique comme un jeu stratégique

« La logique n'est pas une science de ce qui est vrai,
mais l'art de bien penser. »
— Charles S. Peirce

Table des matières

1 Le Jeu de la Vérité **2**
- 1.1 Une autre façon de voir la logique . . . 2
- 1.2 Les rôles des joueurs . . . 2
- 1.3 Qui gagne ? . . . 2

2 Les Pièces du Jeu **3**
- 2.1 Le Plateau : La Feuille d'Assertion . . . 3
- 2.2 Les Pions : Les Propositions . . . 3
- 2.3 La Frontière : La Coupure . . . 3
- 2.4 L'inversion des rôles . . . 3
- 2.5 Le Rouleau : L'Implication . . . 4

3 Les Règles de Mouvement **5**
- 3.1 Règle 1 : La Double Coupure . . . 5
- 3.2 Règle 2 : L'Effacement (en zone paire) . . . 5
- 3.3 Règle 3 : L'Insertion (en zone impaire) . . . 5
- 3.4 Règle 4 : L'Itération . . . 5
- 3.5 Règle 5 : La Dé-itération . . . 6

4 Premiers Puzzles **7**

5 Bonus : Le Brouillard de Guerre **8**
- 5.1 Quand l'information manque... . . . 8
- 5.2 Les choix indépendants . . . 8
- 5.3 Mais si Éloïse ne voit pas ? . . . 8

1 Le Jeu de la Vérité

1.1 Une autre façon de voir la logique

Oubliez les formules compliquées. La logique de Peirce se *joue* comme un jeu. Imaginez un duel intellectuel entre deux adversaires :

ÉLOÏSE	ABÉLARD
La Vérificatrice	*Le Falsificateur*
Veut prouver VRAI	Veut prouver FAUX

1.2 Les rôles des joueurs

Éloïse dit...

« Mon but est de **défendre** la proposition. Je choisis les témoins, je montre les preuves, je construis la démonstration. »

Abélard dit...

« Mon but est de **mettre en doute** la proposition. Je cherche les failles, les contre-exemples, les cas où ça ne marche pas. »

1.3 Qui gagne ?

Règle fondamentale

Une proposition est **VRAIE** si Éloïse possède une **stratégie gagnante** : quoi qu'Abélard tente, elle peut toujours répondre victorieusement.
Une proposition est **FAUSSE** si Abélard possède une stratégie gagnante.

2 Les Pièces du Jeu

2.1 Le Plateau : La Feuille d'Assertion

Le jeu se déroule sur une surface blanche appelée **Feuille d'Assertion**.

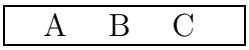
La Feuille d'Assertion



— Une feuille **vide** = le VRAI (tout est possible)
— **Écrire** sur la feuille = **affirmer** quelque chose

2.2 Les Pions : Les Propositions

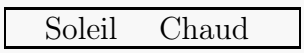
On pose des **lettres** sur la feuille pour représenter des propositions :



Cela signifie : « A est vrai ET B est vrai ET C est vrai ».

La Juxtaposition

Poser plusieurs choses côte à côte, c'est dire qu'elles sont **toutes** vraies.



= « Il y a du soleil ET il fait chaud »

2.3 La Frontière : La Coupure

Voici l'élément **magique** des graphes existentiels : la **coupure**.



C'est un ovale qui **nie** ce qu'il contient : « NON A ».

La Coupure



= « Il ne pleut PAS »



= « NON (NON A) » = « A »

2.4 Les niveaux de profondeur

Chaque coupure crée un nouveau **niveau**. On compte à partir de 0 :

Niveaux pair et impair

Niveau	Nombre de coupures	Contrôle
0 (pair)	Feuille nue	Éloïse
1 (impair)	Dans 1 coupure	Abélard
2 (pair)	Dans 2 coupures	Éloïse
3 (impair)	Dans 3 coupures	Abélard

2.5 L'inversion des rôles

Voici le secret de la coupure dans le jeu :

La Coupure inverse les rôles !

Quand on **entre** dans une coupure, les joueurs **échangent** leurs rôles !

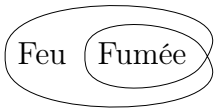
— Zone **paire** (0, 2, 4...) : Éloïse contrôle

— Zone **impaire** (1, 3, 5...) : Abélard contrôle

C'est pourquoi deux coupures s'annulent : on échange les rôles deux fois, donc on revient à la situation initiale !

2.6 Le Rouleau : L'Implication

Le **rouleau** représente « SI ... ALORS ... » :



= « S'il y a du feu, alors il y a de la fumée »

C'est en fait une coupure avec une structure particulière :

Le Rouleau



« Il n'y a pas de A sans B » = « Si A, alors B »

Analyse des niveaux :

— A est au niveau 1 (impair) — zone d'Abélard

— B est au niveau 2 (pair) — zone d'Éloïse

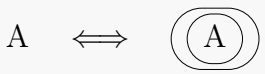
3 Les Règles de Mouvement

Voici les **5 règles** qui permettent de transformer les graphes. Ce sont les « coups » autorisés dans le jeu.

3.1 Règle 1 : La Double Coupure (Double Cut)

Double Cut — Ajouter ou retirer deux coupures vides

On peut **ajouter** ou **retirer** deux coupures imbriquées **sans rien entre elles**.



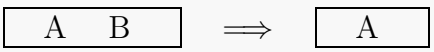
Attention : Les deux coupures doivent être **directement imbriquées** (rien entre elles).

Pourquoi ? Parce que nier deux fois, c'est revenir au point de départ. Deux inversions de rôle = retour à l'identique.

3.2 Règle 2 : L'Effacement (Erasure)

Erasure — Effacer en zone paire

On peut **effacer** n'importe quoi qui se trouve dans une zone **paire** (niveau 0, 2, 4...).

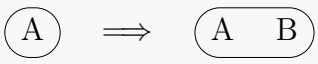


Pourquoi ? Éloïse contrôle les zones paires. Elle peut « affaiblir » ses affirmations (dire moins, c'est toujours compatible avec ce qu'on a dit).

3.3 Règle 3 : L'Insertion (Insertion)

Insertion — Insérer en zone impaire

On peut **insérer** n'importe quoi dans une zone **impaire** (niveau 1, 3, 5...).

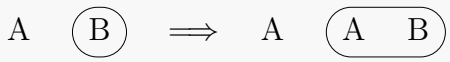


Pourquoi ? Abélard contrôle les zones impaires. Il peut « renforcer » les contraintes (demander plus rend la tâche plus difficile pour Éloïse).

3.4 Règle 4 : L'Itération (Iteration)

Iteration — Copier vers le profond

On peut **copier** un graphe vers un niveau **plus profond** (à l'intérieur de coupures supplémentaires).



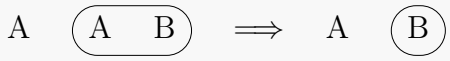
Le A du niveau 0 est copié au niveau 1.

Pourquoi ? Ce qui est vrai « dehors » reste vrai « à l'intérieur ». C'est une forme de monotonie.

3.5 Règle 5 : La Dé-itération (Deiteration)

Deiteration — Effacer une copie

On peut **effacer** un graphe si une copie identique existe à un niveau **moins profond** et reste accessible (pas séparée par d'autres coupures).



Le A au niveau 1 peut être effacé car un A existe au niveau 0.

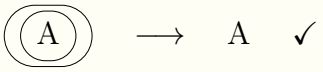
Pourquoi ? L'information redondante peut être supprimée.

4 Premiers Puzzles

Puzzle : Puzzle 1 : La Double Négation

Montrer que  **équivaut à** A.

Solution : Appliquer la règle de **Double Cut**. On retire les deux coupures imbriquées qui n'ont rien entre elles.

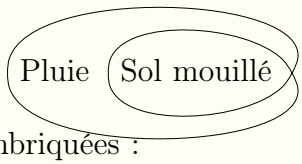


Explication : Les deux coupures sont directement imbriquées (seul A est à l'intérieur de la coupure interne). On peut donc les supprimer ensemble.

Puzzle : Puzzle 2 : Construire « Si A alors B »

Traduire « Si il pleut, alors le sol est mouillé » en graphe.

Solution : Utiliser le rouleau :



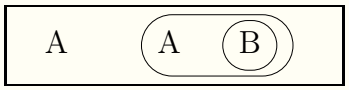
Ou sous forme de coupures imbriquées :



Cela se lit : « Il n'existe pas de situation où il pleut ET le sol n'est PAS mouillé. »

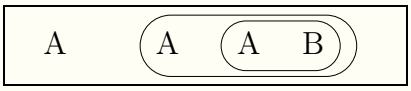
Puzzle : Puzzle 3 : Le Modus Ponens

Prémisses : « A » et « Si A alors B »
Conclusion : « B »
Situation initiale :

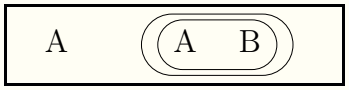


Nous avons A (niveau 0) et le rouleau « Si A alors B ».

Étape 1 — Itération : Copier A du niveau 0 vers le niveau 2 (à côté de B) :



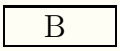
Étape 2 — Dé-itération : Le A au niveau 1 peut être effacé car un A existe au niveau 0 :



Étape 3 — Double Cut : Les deux coupures sont maintenant directement imbriquées, on peut les retirer :



Étape 4 — Effacement : On peut effacer les A redondants (zone paire, niveau 0) :



✓

Victoire ! On a dérivé B à partir de A et « Si A alors B ».

5 Bonus : Le Brouillard de Guerre

5.1 Quand l'information manque...

Dans certains jeux, les joueurs ne voient pas tout. C'est le **brouillard de guerre**.

En logique classique, Éloïse et Abélard jouent à **information parfaite** : chacun voit tous les coups de l'autre avant de jouer.

Mais Peirce avait anticipé des situations plus complexes...

5.2 Les choix indépendants

Imaginez cette situation :

> « Pour tout nombre x, il existe un nombre y plus grand que x. »
> $\forall x \, \exists y \, (y > x)$

Ici, Abélard choisit x *d'abord*, puis Éloïse choisit y en *voyant* le choix d'Abélard. C'est facile pour Éloïse : elle prend $y = x + 1$.

5.3 Mais si Éloïse ne voit pas ?

La **Logique IF** (Independence-Friendly) de Hintikka permet des choix *indépendants* :

> « Pour tout x et tout z, il existe y (indépendant de z) et w (indépendant de x)... »

C'est un jeu à **information imparfaite**. Éloïse doit choisir sans voir certains coups d'Abélard.

Le brouillard dans les graphes

Dans les graphes existentiels de Peirce, la **disposition spatiale** peut représenter cette indépendance. Des lignes d'identité qui se « branchent » sans se croiser montrent des choix simultanés, non séquentiels.

C'est la force du système graphique : il peut exprimer naturellement ce que la notation linéaire cache !

Fin de l'introduction.

À vous de jouer !